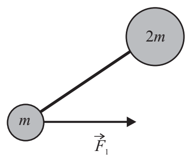
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Física

Física I

Equilíbrio - Resolução

Questões:

Q1 - Considere o haltere representado na figura, com massas m e $2m$.A força $\vec{F}_1$ actua na massa m com a direcção e sentido indicados. É possível encontrar uma força $\vec{F}_2$ que, actuando na massa $2m$, faça com que o haltere se desloque com movimento de translação puro, isto é, sem rotação? Em caso afirmativo, desenhe o vector que representa $\vec{F}_2$, tendo em conta que o seu comprimento deve indicar correctamente o módulo de $\vec{F}_2$ relativamente a $\vec{F}_1$. Em caso negativo, justifique.



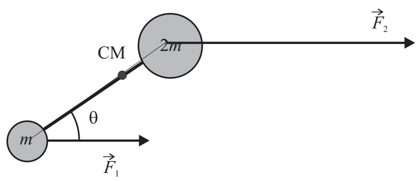
Para que o haltere se desloca com movimento de translação pura, é necessário que o momento resultante dos momentos das forças exteriores aplicadas ao sistema, em relação ao centro de massa do sistema, seja nulo. A posição do centro de massa do sistema está na linha que une as duas massas à distância $2L/3$ do centro da esfera de menos massa. Se aplicarmos à esfera de massa $2m$ uma força $\vec{F}_2$ com a direcção da força $\vec{F}_1$, o momento resultante, em relação à posição do centro de massa, terá a direcção perpendicular à figura e o seu valor é

$$\begin{aligned}\tau_{\text{res}} &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= \frac{2}{3}LF_1 \sin\theta - \frac{1}{3}LF_2 \sin\theta,\end{aligned}$$

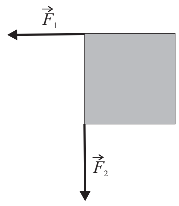
em que θ é o ângulo indicado na figura. Para que este valor seja nulo,

$$F_2 = 2F_1.$$

Consequentemente a resposta é afirmativa e o vector que representa a força $\vec{F}_2$ está indicado na figura.



Q2 - As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ possuem o mesmo módulo e estão aplicadas nos cantos de uma placa quadrada. É possível encontrar uma força $\vec{F}_3$ que, aplicada a um ponto apropriado da placa, consiga, só por si, que a placa esteja em equilíbrio (de translação e rotação, simultaneamente)? Em caso afirmativo, desenhe-a, na posição e com o comprimento e orientação correctos. Em caso negativo, dê uma justificação.



Para que a placa esteja em equilíbrio de translação, é necessário que a soma algébrica das três forças aplicadas seja nula, ou

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Utilizando o sistema de referência da figura abaixo, esta equação vectorial é equivalente às seguintes equações escalares,

$$\begin{aligned} -F_1 + F_{3_x} &= 0 \\ -F_2 + F_{3_y} &= 0, \end{aligned}$$

o que significa que a força $\vec{F}_3$ tem de possuir componentes positivas segundo os eixos dos x e dos y.

Seja L o comprimento do lado da placa. Vamos aplicar $\vec{F}_3$,por exemplo, ao canto superior direito da placa. Para que esta esteja em equilíbrio de rotação, é necessário que a resultante dos momentos das três forças em relação a qualquer eixo seja nula. Vamos escolher um eixo perpendicular à placa e passando pelo canto superior esquerdo da placa, isto é, pelo ponto de aplicação da força $\vec{F}_1$. O momento resultante, em relação a este eixo tem componente segundo a direcção perpendicular à placa dada por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{res}} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ &= 0 + LF_2 - \sqrt{2}LF_{3_x} \sin 45\,^\circ + \sqrt{2}LF_{3_y} \sin 45\,^\circ. \end{aligned}$$

Como queremos equilíbrio rotacional, temos de impor $\tau_{\text{res}} = 0$, ou

$$\begin{aligned} LF_2 - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}LF_{3_x} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}LF_{3_y} &= 0 \\ LF_2 - LF_{3_x} + LF_{3_y} &= 0 \end{aligned}$$

Uma vez que $F_{3_x} = F_1$, $F_{3_y} = F_2$ e $F_1 = F_2$, concluimos que $F_{3_x} = F_{3_y}$, o que conduz a $LF_2 = 0$, o que contraria os dados. Concluimos portanto que não é possível encontrar uma força $\vec{F}_3$ que, aplicada a um ponto apropriado da placa, consiga, só por si, que a placa esteja em equilíbrio. É fácil de verificar que o resultado é independente do ponto de aplicação da força $\vec{F}_3$.

Um raciocínio mais curto (e mais elegante) seria:

- Da condição de equilíbrio translacional conclui-se que as componentes de $\vec{F}_3$ têm de ser iguais.

- Uma dessas componentes fará rodar o sistema (em torno de qualquer eixo), no mesmo sentido em que $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ fariam rodar. A outra componente teria que equilibrar os momentos das restantes forças em torno do eixo de rotação. Mas o momento desta componente terá de ser igual em módulo, e de sentido oposto ao momento da outra componente. Consegue portanto equilibrá-la, mas não consegue equilibrar os momentos das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

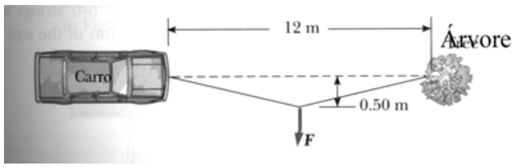
Q3 - Uma caixa alta e uma caixa baixa com iguais massas são colocadas lado a lado, sem se tocar, sobre um plano inclinado. Ao aumentarmos o ângulo do plano inclinado, qual das duas caixas tombará primeiro? Explique.

Q4 - Acha que o centro de gravidade e o centro de massa do Cristo Rei coincidem? Justifique.

Q5 - Que espécie de deformação apresenta um cubo de gelatina quando treme?

Problemas:

P1 - Um estudante tem o seu carro atolado na neve. Tendo estudado Física, ele amarra uma extremidade de uma corda forte ao carro e a outra extremidade da corda ao tronco de uma árvore que está próxima, deixando a corda um pouco bamba. O estudante exerce então uma força $\vec{F}$ no centro da corda numa direcção perpendicular à linha carro-árvore, como se mostra na figura. Sendo a corda inextensível e o módulo da força aplicada $500\,\mathrm{N}$, determine a força exercida no carro. (Presuma a condição de equilíbrio).



O ponto em que a força $\vec{F}$ está aplicada está em equilíbrio. Consequentemente neste ponto estão também aplicadas as forças $\vec{F}'$ e $\vec{F}''$, tais que

$$\begin{aligned} F'\cos\theta - F''\cos\theta &= 0 \\ F'\sin\theta + F''\sin\theta &= F \end{aligned}$$

de onde

$$F' = F''$$

e

$$2F'\sin\theta = F.$$

Num sistema de eixos em que $o$eixo dos x é horizontal e dirigido para a direita e o eixo dos y vertical e apontando para cima, a força exercada no carro é

$$\vec{f} = \left(F' + F'\cos\theta\right)\vec{i} - F'\sin\theta\,\vec{j}$$

Como

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{0.50\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m}} \\ \theta &= \arctan\frac{0.50\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m}} \\ &= 4.76\,^\circ. \end{aligned}$$

e

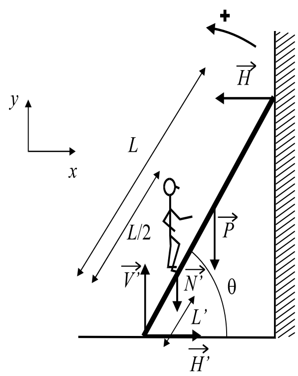
$$\begin{aligned} F' &= \frac{F}{2\sin 4.76\,^\circ} \\ &= \frac{500\,\mathrm{N}}{2\sin 4.76\,^\circ} \\ &= 3.01\times 10^3\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

P2 - Uma escada de densidade uniforme e com massa m está encostada contra uma parede vertical sem atrito fazendo um ângulo de $60\,^\circ$. A base da escada está em repouso sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito estático $\mu_s = 0.40$. Um estudante com massa $M = 2m$ tenta subir a escada. Que fracção do comprimento L da escada terá o estudante atingido quando a escada começa a escorregar?

As forças aplicadas à escada são (ver figura) :

- No ponto de apoio na parede: $\vec{H}$ (não há força vertical porque não há atrito entre a parede e a escada;
- No ponto de apoio no solo: $\vec{H}'$ (na direcção horizontal) e $\vec{V}'$ na direcção vertical;
- No centro de gravidade (que coincide com o centro de massa), à distância $L/2$ da extremidade da escada: $\vec{P}$ (o peso da escada, que tem a direcção vertical);
- No ponto em que o estudante se apoia na escada (à distância L'da extremidade inferior da escada) a força $\vec{N}'$ que o estudante exerce na escada (na direcção vertical dirigida para baixo).

  Repare-se que esta força $\vec{N}'$ *não é* o peso do estudante, apesar de o seu módulo ser igual ao do peso do estudante.Porquê?



A condição de equilíbrio estático é:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= \vec{0} \\ \sum \vec{\tau}_{\text{ext}} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

isto é, o somatório das forças exteriores que se exercem na escada e o somatório dos momentos das forças exteriores que se exercem na escada têm de ser nulos.

A 1.^{a} relação corresponde à seguinte:

$$\vec{H} + \vec{P} + \vec{N}' + \vec{V}' + \vec{H}' = \vec{0}$$

ou, utilizando o referencial da figura,

$$\begin{aligned} x &: \quad -H + H' = 0 \\ y &: \quad -P - N' + V' = 0 \end{aligned}$$

Sabemos que, numa situação de equilíbrio, se o momento das forças exteriores é nulo em relação a um ponto de um referencial de inércia, é nulo em relação a qiualquer outro ponto. Somos assim livres de escolher o ponto em relação ao qual calculamos os momentos das forças exteriores e por isso devemos escolher o que for mais conveniente. Vamos escolher o ponto de contacto da escada com o chão, porque deste modo os momentos das forças $\vec{V}'$ e $\vec{H}'$ são automaticamente nulos. A relação dos momentos pode exprimir-se na seguinte forma:

$$LH \sin(\pi - \theta)\,\vec{k} - \frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{k} - L'\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{k} = 0$$

em que $\vec{k}$ é o vector unitário na direcção do eixo dos z. Esta relação pode colocar-se na forma:

$$\begin{aligned} LH\left(\sin\pi\cos\theta-\sin\theta\cos\pi\right)-\left(mg\frac{L}{2}+2mgL'\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ LH\sin\theta-\left(mg\frac{L}{2}+2mgL'\right)\cos\theta &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Esta última expressão pode ser obtida de uma forma mais rápida, utilizando o seguinte processo:

> Como as forças estão todas no plano xOy, os seus momentos têm a direcção do eixo dos z ou a oposta. Assim, não precisamos de recorrer a vectores e temos apenas que determinar o sentido (positivo ou negativo) e módulo dos momentos. Podemos escolher arbitrariamente um sentido positivo para a rotação da escada (na figura escolheu-se como positivo o sentido directo) e considerar como positivos os momentos das forças que, actuando isoladamente, fizessem rodar a escada nesse sentido e negativos os momentos das forças que, actuando, isoladamente, fizessem rodar a escada no sentido directo.
>
> Assim, em relação ao ponto de contacto da escada com o chão, o momento da força $\vec{H}$ é positivo (porquee se actuasse sozinha, faria rodar a escada no sentido que escolhemos como positivo) e o seu módulo é $HL\sin\theta$ (na realidade o ângulo que a força $\vec{H}$ faz com o vector posição a partir do ponto de contacto da escada com o chão é $\sin(\pi-\theta)$ mas $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$).
>
> Os momentos das forças $\vec{P}$ e $\vec{N}'$ são negativos (porque se actuassem isoladamente, cada uma delas faria rodar a escada no sentido oposto ao que escolhemos como positivo) e os seus valores absolutos são dados, respectivamente, por $\frac{L}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{L}{2}\cos\theta$ e $L'\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=L'\cos\theta$. Desta forma chegamos mais rapidamente à equação (1).

Obtivemos assim três equações:

$$\begin{aligned} -H+H' &= 0 \\ -P-N'+V' &= 0 \\ LH\sin\theta-mg\left(\frac{L}{2}+2L'\right)\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

A escada permanece em equilíbrio, no entanto, enquanto se verificar $H'\leq\mu V'$, em que μ é o coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão. Quando se vericar $H'>V'$, a escada move-se. Podemos assim concluir quen situação limite correpondente ao início do movimento da escada é dada por

$$H'=\mu V',$$

que é assim a 4.^{a} equação de que dispomos.

Vamos supor que o ângulo a que o enunciado se refere é o ângulo θ da figura, isto é $\theta=60^\circ$. Então

$$\begin{aligned} V' &= P'+N' \\ &= mg+2mg \\ &= 3mg \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H' &= H=\mu V' \\ &= 3\mu mg \\ &= 3\times 0.40mg \\ &= 1.2mg \end{aligned}$$

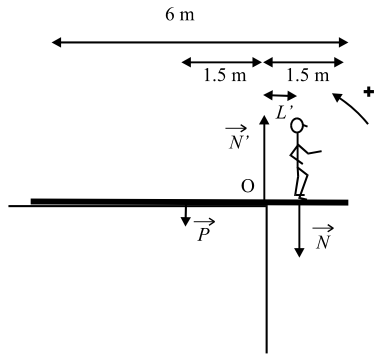
e

$$1.2Lmg\sin 60^\circ - mg\left(\frac{L}{2}+2L'\right)\cos 60^\circ = 0$$

ou, escrevendo $L' = fL$, em que f é um número entre 0 e 1,

$$\begin{aligned}
1.2\cos 60^\circ - \left(\frac{1}{2}+2f\right)\cos 60^\circ &= 0 \\
\left(\frac{1}{2}+2f\right)\cos 60^\circ &= 1.2\sin 60^\circ \\
\frac{1}{2}+2f &= 1.2\tan 60^\circ \\
2f &= 1.2\tan 60^\circ - 0.5 \\
f &= \frac{1.2\tan 60^\circ - 0.5}{2} \\
&= 0.79
\end{aligned}$$

P3 - Uma tábua uniforme de comprimento $6.0\,\mathrm{m}$ e massa $30\,\mathrm{kg}$ está colocada horizontalmente sobre um andaime, com $1.5\,\mathrm{m}$ da tábua suspensa fora do andaime. Qual a distância que um pintor de $70\,\mathrm{kg}$ pode andar sobre a parte suspensa da tábua antes desta virar?



A resposta ao problema consiste na determinação da distância L' (ver figura) entre o pintor o a borda do andaime correspondente ao instante em que a tábua começa a rodar.

Quando o pintor se encontra sobre o andaime, a resultante do peso da tábua a da força com que o pintor actua na tábua (ambas estas forças são vertiucais e dirigidas para baixo) é igual, em módulo, à forçacom que o andaime actua na tábua (vertical e dirigida para cima). No limite (instante em que a tábua começará a rodar) a tábua encontra-se em equilíbrio sob a acção don seu peso $\vec{P}$, da força $\vec{N}$ com que o pintor actua ña tábua e da força $\vec{N}'$ com que a borda do andaime acta também na tábua, no ponto O. Nestas condições, as seguintes equações exprimem a condição de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
\vec{P}+\vec{N}+\vec{N}' &= \vec{0} &(2)\\
\vec{\tau}_{\vec{P}}+\vec{\tau}_{\vec{N}}+\vec{\tau}_{\vec{N}} &= 0, &(3)
\end{aligned}$$

em que $\vec{\tau}_{\vec{F}}$ é o momento da força $\vec{F}$ em relação a um ponto de um referencial de inércia. Se escolhermos como referencial um eixo vertical dirigido para cima e como sentido positivo para os momentos das forças (calculados em relação ao ponto O) o indicado na figura (de acordo com o método explicado no problema anterior) obtemos as seguintes equações, apartir das equações (2) e (3):

$$\begin{aligned}
-P-N+N' &= 0 &(4)\\
P\times 1.5\,\mathrm{m} - N'\times L' &= 0 &(5)
\end{aligned}$$

O módulo da força $\vec{N}'$ é numericamente igual ao do peso do pintor (de acordo com o raciocínio apresentado no problema anterior). As equações (4) e (5) conduzem agora a:

$$L' = \frac{Mg}{mg} 1.5\,\mathrm{m}$$

em que M e m são as massas da tábua e do pintor, respectivamente. Obtemos assim o resultado

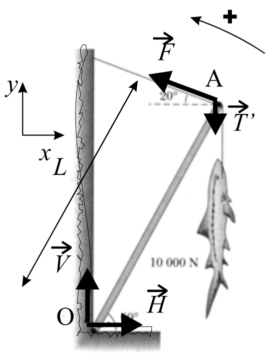
$$\begin{aligned} L' &= \frac{30\,\mathrm{kg}}{70\,\mathrm{kg}} \times 1.5\,\mathrm{m} \\ &= 0.64\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

P4 - Um tubarão de $10000\,\mathrm{N}$ está pendurado por uma corda numa barra de $4.00\,\mathrm{m}$ que pode rodar em torno da sua base. Determine a tensão na corda quando o sistema se encontra na posição indicada na figura. Determine também as forças horizontal e vertical exercidas na base da barra. (Despreze o peso da barra).

De acordo com o raciocínio desenvolvido no problema P2, e
Considerando a figura seguinte, as condições de equilíbrio da barra são:

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{T}' + \vec{P} + \vec{V} + \vec{H} &= 0 \\ \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_{T'} + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_V + \vec{\tau}_H &= \vec{0} \end{aligned}$$

em que $\vec{\tau}_{F_i}$ é o momento da força $\vec{F}_i$ calculado em relação a um ponto qualquer de um referencial inercial. No nosso problema o peso da barra $\vec{P}$ é nulo. Se utilizarmos o referencial indicado na figura e como positivos os momentos das forças que, isoladamente, fariam rodar a barra no sentido indicado com o sinal +, moentos esses calculados em relação ao ponto O, vamos obter as seguintes equações escalares:



$$
\begin{aligned}
-F\cos 20^{\circ} + H &= 0\\
F\sin 20^{\circ} - T' + V &= 0\\
F\sin 20^{\circ} - T'\sin 20^{\circ} &= 0
\end{aligned}
$$

O módulo da tensão da corda $\vec{F}$ é obtido imediatamente:

$$
\begin{aligned}
F &= T'\frac{\sin 20^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}\\
&= 10^4\,\mathrm{N} \times \frac{\sin 20^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}\\
&= 5.1 \times 10^3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, em relação ao referencial indicado na figura,

$$
\vec{F} = 5.1 \times 10^3 \,\left(-\cos 20^{\circ}\vec{i} + \cos 70^{\circ}\vec{j}\right)\,\mathrm{N}
$$

Por sua vez, as forças $\vec{H}$ e $\vec{V}$ no ponto de apoio da escada no chão são dadas por:

$$
\begin{aligned}
H &= F\cos 20^{\circ}\\
&= 5.1 \times 10^3\,\mathrm{N} \times \cos 20^{\circ}\\
&= 4.8 \times 10^3\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= T' - F\sin 20^{\circ}\\
&= 10^4\,\mathrm{N} - 5.1 \times 10^3\,\mathrm{N} \times \sin 20^{\circ}\\
&= 8.3 \times 10^3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= 4.8 \times 10^3\ \vec{i}\ (\mathrm{N})\\
\vec{V} &= 8.3 \times 10^3\ \vec{j}\ (\mathrm{N}).
\end{aligned}
$$

P5 - Quando uma pessoa está de pé na ponta do pé, este tem uma posição como indicado na figura (a). O peso total do corpo $\vec{w}$ é suportado pela força $\vec{n}$ exercida pelo chão na ponta do pé. Um modelo mecânico para esta situação é apresentado na figura (b), onde $\vec{T}$ é a força exercida pelo tendão de Aquiles no pé e $\vec{R}$ é a força exercida pela tíbia no pé. Determine os valores de $\vec{T}$, $\vec{R}$ e θ quando $w = 700$ N.